الدوال كثيرات الحدود

I. تعريف كثير الحدود: عبارة الدالة كثير الحدود تكتب على الشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث:
n درجة كثير الحدود
a_0، a_1،...،a_n معاملاته
$a_p x^p$ الحد الذي درجته p

أمثلة:
الدالة الثابتة $f(x) = a$ هي دالة كثير حدود درجته 0
الدالة الخطية $f(x) = ax$ و التآلفية $g(x) = ax + b$ هي دوال كثيرات حدود من الدرجة 1

*ملاحظة: كل الدوال كثيرات الحدود معرفة على $\mathbb{R}$

II. عمليات على كثير الحدود

1) قواعد الحساب الجبري:

- مجموع، فرق وجداء كثيرات الحدود هي كثيرات حدود
- مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- جداء كثيري حدود درجتهما n و p هو كثير حدود درجته $n + p$

2) جذر كثير حدود: (جذر مرادف كلمة حل)

α جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه $f(\alpha) = 0$

3) تحليل كثير حدود:

إذا كان α جذر لكثير الحدود $f(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ بحيث $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

4) طرق تحليل كثير حدود: هناك ثلاث طرق لتحليل كثير حدود من الدرجة n

* مثال: تحليل كثير حدود $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ جذره 2

✓ طريقة 1: (المطابقة)

$f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$
بالنشر:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$
$f(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$
بالمطابقة مع $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-6 \\ c-2b=-13 \\ -2c=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-2=-6 \\ c-2b=-13 \\ c=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-21 \end{cases}$$

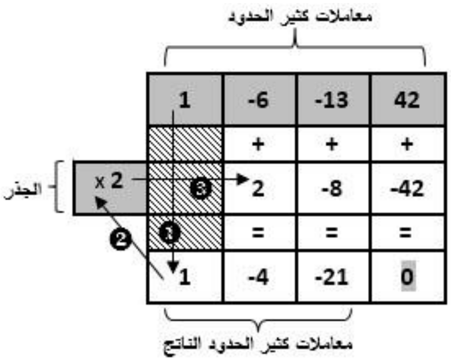
ومنه $f(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 21)$

✓ طريقة 2: (القسمة الإقليدية)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 - 13x + 42 & x-2 \\ \hline -\ (x^3 - 2x^2) & x^2 - 4x - 21 \\ \hline -4x^2 - 13x + 42 & \\ -\ (-4x^2 + 8x) & \\ \hline -21x + 42 & \\ -\ (-21x + 42) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$f(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 21)$

✓ طريقة 3: (هورنر Horner)



$f(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 21)$

III. المعادلات من الدرجة الثانية (مراجعة)

1) الشكل النموذجي:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

حيث $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Prof Mustapha
KHALDI

2) ملخص حل واشارة وتحليل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $E = ax^2 + bx + c$

		$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$	
إذا كان	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
فإن المعادلة	لا تقبل حلول	تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b}{2a}$	تقبل حلين متمايزين $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
إشارتها	x: $-\infty$ … $+\infty$ E: إشارة a	x: $-\infty$ … $\frac{-b}{2a}$ … $+\infty$ E: إشارة a … 0 … إشارة a	x: $-\infty$ … $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ … $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ … $+\infty$ E: إشارة a … 0 … عكس إشارة a … 0 … إشارة a
تحليلها	لا تقبل تحليلا	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

IV]. مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

Prof Mustapha
KHALDI

إذا كان مميز معادلة من الدرجة الثانية $\Delta \geq 0$ فإن:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

نرمز للمجموع بالرمز S و للجداء بالرمز P

$$S = \frac{-b}{a} \quad ; \quad P = \frac{c}{a}$$

✱ نتائج:

❶ حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين فيمكن حساب الحل الآخر باستعمال المجموع: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ أو الجداء: $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

❷ حساب عددين علم مجموعهما وجداؤهما

يمكن حساب عددين علم مجموعهما وجداؤهما باستعمال العلاقة: $x^2 - Sx + P = 0$

❸ تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية $(ax^2 + bx + c = 0)$

إذا كان		فإن
$\frac{c}{a} < 0$		المعادلة تقبل حلين من إشارتين مختلفتين
$\frac{c}{a} > 0$	و $-\frac{b}{a} > 0$	المعادلة تقبل حلين موجبين
	و $-\frac{b}{a} < 0$	المعادلة تقبل حلين سالبين

V]. المعادلات مضاعفة التربيع $(ax^4 + bx^2 + c = 0)$:

يؤول حل المعادلة مضاعفة التربيع $ax^4 + bx^2 + c = 0$ إلى حل الجملة: $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$

✱ملاحظة: عند إيجاد قيمة X_1 و X_2 يجب تعويضهما في المعادلة $X = x^2$ لإيجاد قيم x