الاشتقاقية

Prof Mustapha
KHALDI

I. تعاريف

1) تعريف نهاية دالة عند الصفر

بمفهوم مبسط نقول نهاية الدالة f عند 0 هي l (حيث $l \in \mathbb{R}$) معناه $f(0) = l$ و نكتب $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$

2) قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l}$ أو $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l}$ حيث $(h = x - x_0)$

f غير قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty}$

✱ العدد المشتق: يسمى l العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز له $\boxed{f'(x_0)}$ أي $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

✱ نسبة التزايد: يسمى العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نسبة التزايد للدالة f بين x_0 و $x_0 + h$ و نرمز له ب $g(h)$

✱قاعدة: الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

3) الدالة المشتقة لدالة f

- f قابلة للاشتقاق على D_f معناه f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f
- مشتقة الدالة f هي الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ و نرمز لها f' حيث $\boxed{f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

II. التفسير الهندسي للعدد المشتق

1) معادلة المماس عند نقطة: مماس المنحنى C_f عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A

و معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، معادلته: $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

2) التقريب التآلفي للعدد المشتق

يمكن حساب أي قيمة تقريبية للأعداد من الشكل a, n باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابتها على الشكل $a + h$ حيث a الجزء الصحيح و h الجزء العشري (h قيمة قريبة من 0) $\boxed{f(a+h) = f'(a)h + f(a)}$

✱ملاحظة: إذا كانت لدينا معادلة المماس عند a فيمكن عندها تعويض $a + h$ مباشرة في معادلة المماس

III. مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
b	0
ax	a
x^2	$2x$
ax^n	$n \times ax^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

VI. عمليات على الدوال المشتقة

$f(x)$	$f'(x)$
$(u+v)$	$u' + v'$
$(u \times v)$	$u'.v + v'.u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$nu' \times u^{n-1}$
λu	$\lambda u'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$(uov)'$	$[u'ov] \times v'$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$

تطبيقات الاشتقاقية

Prof Mustapha
KHALDI

❶ تحديد اتجاه تغير دالة

المشتقة f'	تغيرات f
f' موجبة تماما على I	f متزايدة تماما على I
f' سالبة تماما على I	f متناقصة تماما على I
f' معدومة على I	f ثابتة على I

❷ معرفة القيم الحدية للدالة

- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة $(c,f(c))$
- إذا كانت f' موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن f تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى
- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I فإن f تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(c,f(c))$

❸ نقطة الانعطاف

- إذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند قيمة c من I و لا تغير إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c,f(c))$
- إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c,f(c))$
- بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني

❹ حصر دالة

- f متزايدة تماما على $[a,b] \Leftarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- f متناقصة تماما على $[a,b] \Leftarrow f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

❺ الدالة المحدودة من الأسفل أو من الأعلى

- $f(x) \leq k \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و يسمى k عنصرا حادا من الأعلى **(Majorant)**
- $f(x) \geq k \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و يسمى k عنصرا حادا من الأسفل **(Minorant)**

✳ملاحظة:

f تقبل قيمة حدية كبرى عند $(c,f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و $f(c)$ هو **Majorant**

f تقبل قيمة حدية صغرى عند $(c,f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و $f(c)$ هو **Minorant**

❻ نظرية القيم المتوسطة

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ مستمرة و رتيبة على المجال } [a,b] \\ f(a)\times f(b)<0 \end{array}\right\} \Leftarrow f(x)=0 \text{ تقبل حلا وحيدا } x_0 \text{ على المجال } [a,b]$$

❼ المقارنة والوضع النسبي بين دالتين أو دالة ومستقيم

- **بيانيا**
  - C_f فوق $C_g \Leftarrow f(x) > g(x)$
  - C_f تحت $C_g \Leftarrow f(x) < g(x)$
  - C_f تقطع $C_g \Leftarrow f(x) = g(x)$
- **حسابيا**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$

x	a b	x_0 0	
إشارة $f(x)-g(x)$	$-$		$+$
الوضع النسبي بين C_f و C_g	C_f تحت C_g	C_f يقطع C_g	C_f فوق C_g