

Prof Mustapha
KHA-LD9

النهايات ① (السلوك التقاربي لمنحن)

مفاهيم

- ① بصفة عامة يتم حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها
- ② إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a حيث $a \in D_f$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- ③ إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد a تكون هذه النهاية وحيدة
- ④ يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها مثل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

I. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

نقول أن f نهاية منتهية l عند a معناه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = l$

II. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

إذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = \frac{d}{g(x)}$ حيث $g(x)$ كثير حدود، و d و a عدنان حقيقيان حيث $g(a) = 0$ فإن:

فإن	وإشارة d	إذا كانت إشارة $g(x)$
$\lim_{x \leq a} f(x) = -\infty$	$d > 0$	$\frac{-\infty < a > +\infty}{- \quad \phi \quad +}$
$\lim_{x \geq a} f(x) = +\infty$		
$\lim_{x \leq a} f(x) = +\infty$	$d < 0$	$\frac{-\infty < a > +\infty}{+ \quad \phi \quad -}$
$\lim_{x \geq a} f(x) = -\infty$		
$\lim_{x \leq a} f(x) = +\infty$	$d > 0$	$\frac{-\infty < a > +\infty}{+ \quad \phi \quad -}$
$\lim_{x \geq a} f(x) = -\infty$		
$\lim_{x \leq a} f(x) = -\infty$	$d < 0$	$\frac{-\infty < a > +\infty}{+ \quad \phi \quad -}$
$\lim_{x \geq a} f(x) = +\infty$		

*ملاحظة:

فإن	وإشارة d	إذا كانت
$\lim_{x \leq a} f(x) = +\infty$	$d > 0$	$f(x) = \frac{d}{[g(x)]^2} \text{ أو } f(x) = \frac{d}{ g(x) }$
$\lim_{x \geq a} f(x) = +\infty$		
$\lim_{x \leq a} f(x) = -\infty$	$d < 0$	$f(x) = \frac{d}{[g(x)]^2} \text{ أو } f(x) = \frac{d}{ g(x) }$
$\lim_{x \geq a} f(x) = -\infty$		

III. نهاية منتهية عند ما لا نهاية

إذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = \frac{d}{x}$ حيث d عدد حقيقي فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d}{x} = 0$

و منه نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{x} + b = b$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d}{x} + b = b$

IV. نهاية غير منتهية عند ما لا نهاية

نقول أن f نهاية غير منتهية ∞ عند ∞ معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

V. المبرهنات الأولية على النهايات

③ نهاية حاصل قسمة دالتين

إذا كانت $\lim f(x)$ =	و $\lim g(x)$ =	فإن: $\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ =
l	l'	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$	0
l	$-\infty$	0
$+\infty$	$l > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l < 0$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$-\infty$	ح ع ت
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
0	0	ح ع ت
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^-	$-\infty$
$-\infty$	0^+	$-\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$
$l > 0$	0^+	$+\infty$
$l < 0$	0^+	$-\infty$
$l > 0$	0^-	$-\infty$
$l < 0$	0^-	$+\infty$

① نهاية مجموع دالتين

إذا كانت $\lim f(x)$ =	و $\lim g(x)$ =	فإن: $\lim [f(x) + g(x)]$ =
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

② نهاية جداء دالتين

إذا كانت $\lim f(x)$ =	و $\lim g(x)$ =	فإن: $\lim [f(x) \times g(x)]$ =
l	l'	$l \times l'$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	ح ع ت
0	$-\infty$	ح ع ت
$l < 0$	0^+	0^-
$l < 0$	0^-	0^+

⑤ حالات عدم التعيين

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \times \infty$	$+\infty - \infty$
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$		$-\infty + \infty$

④ حالات خاصة

إذا كانت $\lim f(x)$ =	فإن: $\lim [f(x)]^2$ =	$\lim f(x) $ =	$\lim \sqrt{f(x)}$ =
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
0^-	0^+	0^+	

Prof Mustapha
KdA-LD9

Prof Mustapha
KdH-A-LD9

النهايات ② (التفسير الهندسي)

① المستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب (عمودي)

$$x = a \Leftarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

مستقيم مقارب عمودي يوازي محور الترتيب

② المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (أفقي)

$$y = b \Leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

مستقيم مقارب أفقي يوازي محور الفواصل

③ المستقيم المقارب المائل

[أ] المبحث عن المستقيم المقارب المائل

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$$

إذا كان

$$y = ax + b \Leftarrow \text{مستقيم مقارب مائل للمنحني } C_f$$

[ب] إثبات أن مستقيم هو مقارب مائل لـ C_f

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

لإثبات أن $y = ax + b$ مقارب مائل لـ C_f يكفي برهان أن:

[ج] دراسة وضعية C_f بالنسبة لمستقيم

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ نقوم بدراسة

$$\text{إشارة الفرق: } f(x) - (ax + b)$$

x	$-\infty$ $+\infty$	x_0
إشارة $f(x) - y$	-	+
الوضع النسبي بين C_f و (Δ)	C_f تحت (Δ)	C_f فوق (Δ)

*ملاحظة: يسمى المنحني الممثل لدالة تناظرية من الشكل: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c \neq 0$ و $ad - cb \neq 0$ قطعا

$$\text{زائدا معادلنا مستقيمية المقاربين هما: } x = -\frac{d}{c} \text{ و } y = \frac{a}{c}$$

مخطط دراسة دالة

1 مجموعة التعريف

✓ تحديد مجموعة تعريف الدالة إن لم تكن قد أعطيت في النص

2 دراسة شفهية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة)

✓ قصد تقليص مجموعة الدراسة وتحديد مركز أو محور تناظر المنحني

3 حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف

4 تحديد المستقيمات المقاربة

5 دراسة اتجاه تغير الدالة

① حساب المشتقة

② دراسة إشارة المشتقة

③ استنتاج اتجاه تغير الدالة

④ تحديد القيم الحدية في حالة وجودها

6 حساب نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات

7 تشكيل جدول التغيرات

8 التمثيل البياني للدالة

① رسم المستقيمات المقاربة

② تمثيل النقط الحدية (الكبرى و الصغرى إن وجدت) مع رسم المماسات الأفقية عندها

③ تمثيل نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات

④ تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب احداثياتها

⑤ رسم المماسات المائلة (إن وجدت)

⑥ رسم محور التناظر أو تمثيل مركز التناظر (إن وجدو) لاستغلال التناظر و تسهيل الرسم

⑦ استغلال و استعمال جدول التغيرات لرسم الدالة

Prof Mustapha

KdH-A-LD9