الزوايا الموجهة

➤ يوجه المستوي
- توجيها مباشرا (موجب) ← عكس عقارب الساعة
- توجيها غير مباشر (سالب) ← اتجاه عقارب الساعة

➤ نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الإتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة غير معدومة:

➤ نسمي الثنائية $(\vec{u},\vec{v})$ زاوية موجهة لشعاعين.

✪ إذا كان x قيس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ فإن كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ مع $\boxed{k\in\mathbb{Z}}$

✪ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi,\pi]$ أو $[0,2\pi[$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$

✪ إيجاد القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})=x$:

❶ نكتب الشكل العام للزاوية أي: $(\vec{u},\vec{v})=x+2k\pi$

❷ نحصر الشكل العام للزاوية بين π و $-\pi$ أي: $-\pi<x+2k\pi<\pi$

❸ يكفي إيجاد k انطلاقا من هذا الحصر ثم تعويضه في الشكل العام لحساب القيس الرئيسي.

✪ علاقة شال:

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$$

نتائج:

- $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})$
- $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$

Prof Mustapha
KHALDI

✪ تقايس الزوايا الموجهة:

لتكن $(\vec{u},\vec{v})=\alpha$ و $\left(\vec{u'},\vec{v'}\right)=\alpha'$

$(\vec{u},\vec{v})$ و $\left(\vec{u'},\vec{v'}\right)$ متقايستان $\Leftrightarrow \alpha'=\alpha+2k\pi$ أي $\alpha'-\alpha$ مضاعف لـ 2π

✪ الارتباط الخطي في الزوايا الموجهة:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow$
- $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi$ $\Leftarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ في نفس الاتجاه)
- أو
- $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$ $\Leftarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ في اتجاهين متعاكسين)

✪ خاصية:

$\{k;k'\}\in\mathbb{R}^*$

- إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$
- إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

➤ الزاوية المحيطية والزاوية المركزية:

إذا كانت A، B و M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مثلثية (C) مركزها O فإن:

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$$

❖ حساب المثلثات

- $\cos(x+\pi) = -\cos x$
- $\sin(x+\pi) = -\sin x$

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

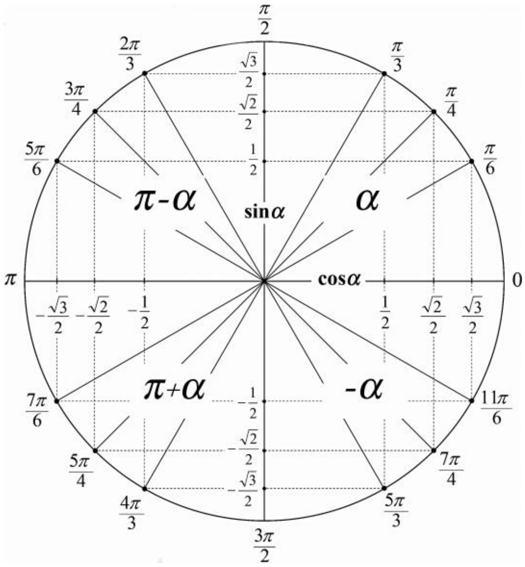
- $\cos(x+2k\pi) = \cos x$
- $\sin(x+2k\pi) = \sin x$

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

جدول زوايا شهيرة:

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

الدائرة المثلثية:



❖ الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم مباشر متعامد ومتجانس ولتكن M نقطة من المستوي غير منطبقة على O

✳ تسمى الثنائية $M(x;y)$ الاحداثيات الديكارتية للنقطة M

✳ تسمى الثنائية $M(r;\theta)$ الاحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r = OM$ و $\theta = (\vec{i},\overrightarrow{OM})$

<u>مصطلحات:</u> النقطة O تسمى القطب، $(O;\vec{i})$ يسمى المحور القطبي، r نصف القطر القطبي و θ زاوية قطبية

❖ العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta$$

Prof Mustapha
KHALDI

❖ المعادلات المثلثية

❶ $\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$

❷ $\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$

❸ المعادلات من الشكل $\cos x = a$

✳ إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

✳ إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

1) نبحث عن القيس الرئيسي c حيث $\cos c = a$

2) الحلول هي: $\begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = -c + 2k\pi \end{cases}$

❹ المعادلات من الشكل $\sin x = a$

✳ إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

✳ إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

1) نبحث عن القيس الرئيسي c حيث $\sin c = a$

2) الحلول هي: $\begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = \pi - c + 2k\pi \end{cases}$

❺ المعادلات من الشكل $\cos u = \sin v$

✳ إما نحول sin إلى cos بالقانون $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ فتصبح المعادلة $\cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ أي من الشكل ❶

✳ أو نحول cos إلى sin بطريقتين:

- بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = sin\ v$ أي من الشكل ❷
- أو بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = sin\ v$ أي من الشكل ❷

Prof Mustapha

KHALDI