لحساب نهاية دالة معينة **لما** x **يؤول إلى عدد حقيقي** (وليس إلى ما لا نهاية) دائما نقوم بالتعويض

مثلا : $\lim\limits_{x\to -3}\left(2x^2+\frac{4x-3}{x-7}+2x-6\right)=2(2)^2+\frac{4(2)-3}{2-7}+2(2)-6=8+\frac{5}{-5}+4-6=8-1+4-6=5$

نهاية دالة كثير حدود لما x يؤول إلى ∞ :

نهاية دالة كثير حدود لما x يؤول إلى ∞ هي نهاية الحد الأعلى درجة لما x يؤول إلى ∞ .

مثال : (**انتبه : احذف رمز** lim **عندما تقوم بالتعويض**)

1) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-3x^3-4x^2+5x-3\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-3x^3\right)=+\infty$ (لأن $-3\times\underbrace{(-\infty)\times(-\infty)\times(-\infty)}_{-\infty}=+\infty$)

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-4x^2+5x^2-9x-3\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-4x^2\right)=-\infty$ (لأن $-4\times\underbrace{(+\infty)\times(+\infty)}_{+\infty}=-\infty$)

نهاية دالة ناطقة لما x يؤول إلى ∞ :

نهاية دالة ناطقة لما x يؤول إلى ∞ هي نهاية <u>الحد الأعلى درجة في البسط</u> على نهاية <u>الحد الاعلى درجة في المقام</u> لما x يؤول إلى ∞ثم **<u>الاختزال</u>** ثم **<u>التعويض</u>** (تذكر : $\frac{\text{عدد}}{\infty}=0$ ، $\frac{\infty}{\text{عدد}}=\infty$)

أمثلة : (**انتبه : احذف رمز** lim **عندما تقوم بالتعويض**)

1) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{4x^3-x^2-3x+1}{10x-7}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{4x^3}{10x}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2x^2}{5}\right)=\frac{2\times(+\infty)}{5}=\frac{+\infty}{5}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2x^2+5x-3}{-3x^3+8x-5}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2x^2}{-3x^3}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2}{-3x}\right)=\frac{2}{+\infty}=0$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{4x^2-2x+7}{-5x^2+9x-5}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{4x^2}{-5x^2}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{4}{-5}\right)=-\frac{4}{5}$

نهاية دالة ناطقة لما x يؤول إلى عدد حقيقي حيث نتيجة النهاية هي $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\text{عدد}}{0}$ (حيث $\text{عدد}\neq 0$):

أ) نهاية دالة ناطقة لما x يؤول إلى عدد حقيقي a حيث نتيجة النهاية هي $\frac{\text{عدد}}{0}$ (حيث $\text{عدد}\neq 0$):

(قبل شرح كيفية حساب هذه النهاية يجب أن تعلم أن $\infty = \frac{\text{عدد}}{0}$)

(إشارة ∞ ناتجة من إشارة 0 الموجود في المقام و إشارة العدد الموجود في البسط)

(لذلك ندرس إشارة المقام لمعرفة إشارة 0 الموجود في المقام) ** أعلم انك لم تفهم جيدا **

راقب الأمثلة :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-4}{4-2x}=\frac{3(2)-4}{4-2(2)}=\frac{6-4}{4-4}=\frac{2}{0}=\infty$ (و لكن ما هي إشارة ∞ ؟ أعلم أن 2 موجب . و 0 ؟)

ندرس إشارة المقام $4-2x$ **:** (إذا نسيت طريقة دراسة الإشارة ابحث في المطبوعات الخاصة بالإشارة)

$4-2x=0$ معناه $x=2$. و عليه :

x	$-\infty$ ≺ 2 ≻ $+\infty$
$4-2x$	+ 0 -

نلاحظ أن لما $2\prec x$ الإشارة موجبة أي 0^+

و لما $2\succ x$ الإشارة سالبة أي 0^-

لذلك : $\lim\limits_{x\overset{\prec}{\longrightarrow}2}\frac{3x-4}{4-2x}=\frac{2}{0^+}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{\succ}{\longrightarrow}2}\frac{3x-4}{4-2x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$

كيفية حساب النهايات لدوال كثير حدود أو دالة ناطقة MEBARKI2016

(2 $\lim_{x \to 3} \frac{x-7}{x^2-5x+6} = \frac{(3)-7}{(3)^2-5(3)+6} = \frac{-4}{9-15+6} = \frac{-4}{0} = \infty$

ندرس إشارة المقام x^2-5x+6 : حساب Δ : $\Delta = (-5)^2-4(1)(6) = 25-24 = 1 \succ 1$

ومنه $x_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2$ و $x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$ وعليه :

x	$-\infty$		2		$\prec$ 3 $\succ$		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

نلاحظ أن لما $x \prec 3$ الإشارة سالبة أي 0^-

و لما $x \succ 3$ الإشارة موجبة أي 0^+

لذلك : $\lim_{x \xrightarrow{\prec} 3} \frac{x-7}{x^2-5x+6} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{\succ} 3} \frac{x-7}{x^2-5x+6} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

M EBARKI
M ENACER
M AYAR
M AYA

(3 $\lim_{x \to 4} \frac{2x^2-7x+1}{x^2-8x+16} = \frac{2(4)^2-7(4)+1}{(4)^2-8(4)+16} = \frac{32-28+1}{16-32+16} = \frac{5}{0} = \infty$

ندرس إشارة المقام $x^2-8x+16$: حساب Δ : $\Delta = (-8)^2-4(1)(16) = 64-64 = 0$

العبارة تقبل جذرا مضاعفا هو $x = \frac{8}{2(1)} = 4$ وعليه :

x	$-\infty$		$\prec$ 4 $\succ$		$+\infty$
$x^2-8x+16$		+	0	+	

نلاحظ أن لما $x \prec 4$ الإشارة موجبة أي 0^+

و لما $x \succ 4$ الإشارة موجبة أي 0^+

لذلك : $\lim_{x \to 4} \frac{2x^2-7x+1}{x^2-8x+16} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

ب) نهاية دالة ناطقة لما x يؤول إلى عدد حقيقي a حيث نتيجة النهاية هي $\frac{0}{0}$:

في هذه الحالة نقوم بقسمة البسط والمقام للدالة الناطقة على $x-a$ ثم نقوم بعملية الاختزال ثم نحسب النهاية :

مثال : $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-6x+5} = \frac{(5)^2-7(5)+10}{(5)^2-6(5)+5} = \frac{25-35+10}{25-30+5} = \frac{0}{0}$ **(تسمى حالة عدم تعيين)**

نقوم بقسمة البسط $x^2-7x+10$ والمقام x^2-6x+5 على $x-5$ ثم نختزل :

x^2-6x+5	$x-5$
$-x^2+5x$	
$-x+5$	$x-1$
$x-5$	
0	

$x^2-7x+10$	$x-5$
$-x^2+5x$	
$2x+10$	$x-2$
$-2x-10$	
0	

أي : $x^2-6x+5 = (x-5)(x-1)$ و $x^2-7x+10 = (x-5)(x-2)$

الآن **الاختزال :** $\frac{x^2-7x+10}{x^2-6x+5} = \frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-1)} = \frac{x-2}{x-1}$

و أخيرا حساب **النهاية :** $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-6x+5} = \lim_{x \to 5} \frac{x-2}{x-1} = \frac{(5)-2}{(5)-1} = \frac{3}{4}$

انتظروا الجديد ....

يتمنى **الأستاذ مباركي** MEBARKI2016 أنه استطاع إزالة بعض الصعوبات التي كان يصادفها التلميذ حول النهايات و حول بقية المجالات ..... لا تخف سأبقى أحاول إزالة الصعوبات إلى أخر رمق ..... فدائما بحول الله يوجد الجديد ....